

Nicht-kooperative Spiele und das Nash-Gleichgewicht

David Stadelmann*
Av. Beauregard 9, 1700 Fribourg

1. Juni 2006

Zusammenfassung

Der Begriff des Nash-Gleichgewichts ist ein zentraler Begriff der mathematischen Spieltheorie. Es handelt sich dabei um ein Lösungskonzept von Spielen, das sich dadurch auszeichnet, dass die Spieler ihre Strategieentscheidungen nicht revidieren wollen, wenn ihnen die Lösung empfohlen wird. Dieses Lösungskonzept ist allgemein für nicht-kooperative Spiele akzeptiert und wird als Gleichgewicht bezeichnet.

1 Einleitung

Die Spieltheorie (*engl.* game theory) ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Modellierung und Untersuchung von Gesellschaftsspielen, von im weitesten Sinn gesellschaftsspielähnlichen Interaktionssystemen sowie mit den in solchen Systemen eingesetzten Strategien beschäftigt. Dabei ist die Spieltheorie weniger eine zusammenhängende Theorie als vielmehr ein Instrument zur Analyse von strategischen Entscheidungssituationen. Lösungen von Spielen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Spieler ihre Strategieentscheidungen nicht revidieren wollen wenn ihnen die Lösung empfohlen wird, werden als *Gleichgewicht* bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit soll insbesondere auf ein allgemein akzeptiertes Konzept zur Lösung von nicht-kooperativen Spielen eingegangen werden, das *Nash-Gleichgewicht*. In einem weiteren Schritt wird genauer auf eine oft verwendete Art von Spielen, die sogenannten streng kompetitiven Spiele oder auch Nullsummenspiele, eingegangen und kurz angedeutet, wie die Theorie der nicht-kooperativen Spiele auf jene der kooperativen erweitert werden kann.

*email: david.stadelmann@unifr.ch; Telefon: +41 (026) 300 93 82; Telefax: +41 (026) 300 96 78; Internet: <http://david.stadelmann-online.com>

2 Terminologie und Definitionen

Wir präsentieren hier die Basiskonzepte wie auch die notwendigen Definitionen zum allgemeinen Verständnis der Spieltheorie. Die Herleitung der Idee und der Lösung von nicht-kooperativen Spielen folgen daraus implizit.

Definition 1 *Ein strategisches n -Personen Spiel G kann als Tripel*

$$G := \langle n, (\Pi_i)_{i \in n}, (a_i)_{i \in n} \rangle$$

geschrieben werden. Dabei setzt sich das Spiel aus n Spielern zusammen, wobei jeder Spieler i über eine endliche Anzahl von reinen Strategien $\pi_{i\alpha} \in \Pi_i$ verfügt $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Die $\pi_{i\alpha}$ können in einer Menge $\Pi_i \subset \mathbb{R}^m$, der Strategiemenge des Spielers i , zusammengefasst werden. Wir notieren mit $\times_{i \in n} \Pi_i = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \dots \times \Pi_n$ die entsprechende Produktmenge beziehungsweise das kartesische Produkt aus den Strategiemengen der einzelnen Spieler. Weiters wird jedem Spieler i eine stetige, quasikonkave¹ Auszahlungsfunktion $a_i : \times_{i \in n} \Pi_i \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet, welche die n -Tupel der Strategien nach \mathbb{R} abbildet.²

Implizit wird in dieser Definition angenommen, dass sich die gewählten Strategien in Spielausgängen niederschlagen, die dann zu verschiedenen Auszahlungen führen. Für eine explizite Modellierung kann der direkte Einbau von Spielausgängen hilfreich sein.

Definition 2 (gemischte Strategie oder Randomisierung) *Eine gemischte Strategie s_i eines Spielers i ist eine Kombination seiner reinen Strategien $\pi_{i\alpha} \in \Pi_i$ und wird ebenfalls als ein Element von Π_i betrachtet. Wir schreiben $s_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha} \in \Pi_i$ mit $c_{i\alpha} \geq 0$ und $\sum_{\alpha} c_{i\alpha} = 1$. Die gemischten Strategien s_i können also als Linearkombinationen angesehen werden. Wir unterstellen von nun an, dass die Menge Π_i der s_i eine nicht-leere, kompakte und konvexe Teilmenge des Euklidischen Raumes ist.³*

Bemerkung 3 *Wir bemerken, dass eine pure Strategie $\pi_{i\alpha}$ auch immer als eine gemischte Strategie s_i geschrieben werden kann.*

¹Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f quasikonkav ist, falls die Menge $\{x \in D : f(x) \geq a\}$ konvex ist für alle $a \in \mathbb{R}$. f ist quasikonvex, falls $\{x \in D : f(x) \leq a\}$ konvex ist für alle $a \in \mathbb{R}$.

²Anstelle von Auszahlungsfunktionen sprechen manche Autoren (vgl. OSBORNE UND RUBINSTEIN, 1994) auch von Präferenzrelationen. Präferenzrelationen können als eine Verallgemeinerung von Auszahlungsfunktionen angesehen werden.

³Die Hauptidee der Einführung gemischter Strategien ist es, die diskreten puren Strategien zu „stetig“ zu machen. RITZBERGER (2003) erwähnt ebenfalls, dass gemischte Strategien als Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen oder Verteilungsfunktion von puren Strategien verstanden werden können.

Beispiel 4 Ein Unternehmen i kann als Output die Menge $\pi_{i1} = 0$ und $\pi_{i2} = M$ produzieren sowie jede Menge zwischen 0 und M : $0 \leq s_i \leq M$. Die Strategiemenge $\Pi_i = [0, M]$ ist konvex, weil jede konvexe Kombination zwischen 0 und M , das heisst $\lambda M + (1 - \lambda)0 = \lambda M$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, produziert werden kann. Da die Menge nach oben und unten beschränkt ist und 0 und M enthalten sind, ist Π_i auch kompakt.

Die allgemeine Formulierung und die hohe Abstraktion erlauben es, diese Definition in einer Reihe von Situationen anzuwenden. Ein Spieler kann ein Individuum sein oder eine beliebige andere Entscheidungseinheit, wie zum Beispiel eine Regierung, ein Verwaltungsrat, eine marxistische Revolutionsarmee, ja sogar sogar eine Blume oder ein Tier. Allerdings sind die Anwendungsmöglichkeiten dadurch beschränkt, dass jedem Spieler eine Auszahlungsfunktion zugeordnet werden muss. Als Auszahlungsfunktionen oder Präferenzrelationen können jedoch bereits die einfachen Gefühle eines Spieler bezüglich verschiedener Endzustände oder im Falle eines nicht-menschlichen Organismus die Wahrscheinlichkeit des reproduktiven Erfolgs verwendet werden.

Selbstverständlich bevorzugt Spieler i Strategie $\pi_{i\gamma}$ gegenüber $\pi_{i\delta}$ falls

$$a_i(\dots, \pi_{i\gamma}, \dots) > a_i(\dots, \pi_{i\delta}, \dots)$$

bei gegebenen $\pi_{j\alpha}$ für $j = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$. Weiters ist es einfach einzusehen, dass a_i problemlos auf gemischte Strategien erweitert werden kann. a_i ist dann ebenfalls linear in den gemischten Strategien (vgl. RITZBERGER, 2003).

Wir schreiben \mathfrak{s} für ein n -Tupel von gemischten Strategien. Falls

$$\mathfrak{s} := (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

dann ist

$$a_i(\mathfrak{s}) := a_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

So ein n -Tupel \mathfrak{s} kann als Punkt in einem Vektorraum angesehen werden - dem Produktraum der Vektorräume, die die gemischten Strategien enthalten. Weiters führen wir die Substitutionsnotation

$$(\mathfrak{s}; t_i) := (s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

ein. Nachfolgend geben wir mehrere verschiedene Kriterien für ein Gleichgewicht (vgl. NASH, 1951).

Definition 5 (Gleichgewicht) Ein n -Tupel \mathfrak{s} ist genau dann ein Gleichge-

wicht von $G = \langle n, (\Pi_i)_{i \in n}, (a_i)_{i \in n} \rangle$ falls für alle Spieler i gilt:

$$a_i(\mathfrak{s}) = \max_{\text{für alle } r_i} (a_i(\mathfrak{s}; r_i)) \quad (1)$$

Wenn $\mathfrak{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ und s_i die pure Strategie $\pi_{i\alpha}$ benutzt, also $c_{i\alpha} > 0$, sagen wir, dass \mathfrak{s} die pure Strategie $\pi_{i\alpha}$ benutzt. Wegen der Linearität von $a_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$ in s_i gilt:

$$\max_{\text{für alle } r_i} (a_i(\mathfrak{s}; r_i)) = \max_{\alpha} (a_i(\mathfrak{s}; \pi_{i\alpha})) \quad (2)$$

Definieren wir $a_{i\alpha}(\mathfrak{s}) := a_i(\mathfrak{s}; \pi_{i\alpha})$, so ergibt sich trivialerweise folgende notwendige und hinreichende Bedingung, dass \mathfrak{s} ein Equilibrium ist:

$$a_i(\mathfrak{s}) = \max_{\alpha} (a_{i\alpha}(\mathfrak{s})) \quad (3)$$

Wenn $\mathfrak{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ und $s_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$, dann ist $a_i(\mathfrak{s}) = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} a_{i\alpha}(\mathfrak{s})$. Damit also die Formulierung (3) hält, muss $c_{i\alpha} = 0$ sein, falls $a_{i\alpha}(\mathfrak{s}) < \max_{\beta} (a_{i\beta}(\mathfrak{s}))$. Dies ist gleichbedeutend zu sagen, dass \mathfrak{s} die pure Strategie $\pi_{i\alpha}$ nicht benutzt, es sei denn, es handelt sich um eine optimale pure Strategie für Spieler i . Wir schreiben also

$$\text{wenn } \pi_{i\alpha} \text{ in } \mathfrak{s} \text{ benutzt wird, dann } a_{i\alpha}(\mathfrak{s}) = \max_{\beta} (a_{i\beta}(\mathfrak{s})) \quad (4)$$

Es handelt sich um eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung für ein Gleichgewicht.

In Worten: Ein Gleichgewicht ist ein n -Tupel \mathfrak{s} so, dass die gewählte Strategie eines jeden Spielers seine Auszahlung maximiert bei gegebenen Strategien der anderen Spieler. Somit ist jede Strategie der Spieler optimal gegen die Strategien der anderen. Nochmals aus anderer Perspektive formuliert: Ausgehend von einem Equilibrium, besteht für keinen Spieler ein Anreiz, von seiner Gleichgewichtsstrategie abzuweichen. Dieses fundamentale Konzept einer Spielösung wird heute gemeinhin als Nash-Gleichgewicht, Nash-Equilibrium oder Nash-Lösung bezeichnet.

Eine gleichwertige Definition des Nash-Gleichgewichts, die gewöhnlicherweise in der neueren Literatur angeführt wird, lautet wie folgt:

Definition 6 Sei $G = \langle n, (\Pi_i)_{i \in n}, (a_i)_{i \in n} \rangle$ ein strategisches Spiel. Wir definieren s_{-i} als die Strategien der Spieler $n \setminus i$ und schreiben dementsprechend

auch $s_{-i} \in \Pi_{-i}$ (Strategieraum ohne Strategien des Spielers i). Weiter sei

$$\begin{aligned} B_i(s_{-i}) &= \{s_i \in \Pi_i \mid a_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \\ &\geq a_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n), \text{ f\"ur alle } s'_i \in \Pi_i\} \end{aligned} \quad (5)$$

die Menge der besten Strategien („Funktion der besten Antworten“) von Spieler i bei gegebenen s_{-i} . Ein Nash-Equilibrium ist eine Strategie s_i^* f\"ur welche

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*) \quad (6)$$

f\"ur alle $i \in n$.

Definition (6) gibt eine (nicht notwendigerweise effiziente) Methode ein Nash-Gleichgewicht mit Hilfe der „Funktion der besten Antworten“ zu finden.

Beispiel 7 Wir betrachten zwei identische Unternehmen die ein homogenes Gut produzieren, sich um die Nachfrage konkurrieren und sich ihrer wechselseitigen Beziehung bewusst sind („Cournot-Duopol“). Das Gewinnoptimierungsproblem f\"ur $i = 1, 2$ laute

$$\max_{s_i} (a_i(s_1, s_2)) = \max_{s_i} (p(s_1 + s_2)s_i - c_i(s_i))$$

wobei s_i Ausbringungsmengen⁴, $p(\cdot)$ die Preisfunktion am Markt und $c_i(s_i)$ die Kostenfunktion darstellen. Die Bedingung erster Ordnung f\"ur Unternehmen 1 lautet $\frac{\partial a_1}{\partial s_1} \stackrel{!}{=} 0$ woraus sich bei geeigneten Annahmen \u00fcber die Form der betreffenden Funktionen eine Reaktionskurve $s_1 = f_1(s_2)$ f\"ur Unternehmen 1 ableiten l\"asst (analog f\"ur Unternehmen 2).⁵ Im Nash-Gleichgewicht (s_1^*, s_2^*) gilt $s_1^* = f_1(s_2^*)$ und $s_2^* = f_2(s_1^*)$.

Beispiel 8 Weitere klassische Spiele die in der Literatur aufgef\"uhrt werden, tragen unter anderem die Titel „Kampf der Geschlechter (Battle of Sexes - BoS)“, „Das Gefangenendilemma (The Prisoner’s Dilemma - PD)“ und „Falke-Taube (Hawk-Dove)“.

3 Existenz eines Gleichgewichts

Unter den oben angefuhrten Definitionen notieren wir zuerst folgenden fundamentalen Satz der nicht-kooperativen Spieltheorie:

⁴Betrachte s_i zum Beispiel als gemischte Strategie der zwei reinen Strategien $\pi_{i1} = \lim_{n \rightarrow 0} s(p)$ und $\pi_{i2} = \lim_{n \rightarrow \infty} s(p)$, wobei $s(p) := p^{-1}(s)$.

⁵Achtung! Der Begriff Reaktionskurve vermittelt die Vorstellung von Dynamik. Die Entscheidungen werden aber simultan getroffen.

Satz 9 (Existenz eines Gleichgewichts) Sei $G = \langle n, (\Pi_i)_{i \in n}, (a_i)_{i \in n} \rangle$ ein Spiel mit folgenden Eigenschaften:

- der Strategieraum $\Pi_i \subset \mathbb{R}^m$ ist kompakt und konvex für alle Spieler $i \in n$.
- für alle $i \in n$ gilt: $a_i(\mathfrak{s})$ ist stetig und quasi-konkav in s_i .

Dann existiert ein Gleichgewicht (ein Gleichgewichtspunkt).

Zuerst führen wir den Beweis der Existenz eines Gleichgewichts wie in NASH (1951) mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Brouwer durch. Im Weiteren wenden wir uns dem historisch ersten Existenzbeweis nach NASH (1950A) unter Ausnutzung des Fixpunktsatzes von Kakutani zu, wobei die sehr kurze Darstellung von NASH (1950A) erweitert und ausgeführt wird.

3.1 Existenzbeweis unter Verwendung des Fixpunktsatzes von Brouwer

Satz 10 (Fixpunktsatz von Brouwer) Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ nicht-leer, konvex und kompakt und sei $f : K \rightarrow K$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt.

Beweis. vgl. BORDER (1985) ■

Existenzbeweis (Nash-Gleichgewicht). Zum Existenzbeweis mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Brouwer konstruieren wir eine stetige Transformation T des Raumes der n -Tupel so, dass die Fixpunkte von T genau die Gleichgewichte des Spieles ergeben.

Sei \mathfrak{s} ein n -Tupel von gemischten Strategien, $a_i(\mathfrak{s})$ die entsprechende Auszahlungsfunktion an Spieler i und $a_{i\alpha}(\mathfrak{s})$ die Auszahlung von Spieler i wenn er zu seiner puren Strategie $\pi_{i\alpha}$ wechselt, während die anderen Spieler weiter ihre gemischten Strategien aus \mathfrak{s} spielen.

Wir definieren nun eine Menge von stetigen Funktionen von \mathfrak{s} als

$$\varphi_{i\alpha}(\mathfrak{s}) := \max(0, a_{i\alpha}(\mathfrak{s}) - a_i(\mathfrak{s}))$$

und definieren für jedes s_i aus \mathfrak{s} die Veränderung s'_i als

$$s'_i := \frac{s_i + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\mathfrak{s}) \pi_{i\alpha}}{1 + \sum_{\alpha} \varphi_{i\alpha}(\mathfrak{s})}$$

Weiters bezeichnen wir mit \mathfrak{s}' das n -Tupel $(s'_1, s'_2, \dots, s'_n)$.

Es ist zu zeigen, dass die Fixpunkte der Zuordnung $T : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}'$ die Gleichgewichtspunkte von $G = \langle n, (\Pi_i)_{i \in n}, (a_i)_{i \in n} \rangle$ sind.

Betrachten wir zuerst ein beliebiges n -Tupel \mathfrak{s} . In \mathfrak{s} besteht die gemischte Strategie s_i eines Spielers i aus bestimmten seiner reinen Strategien. Einige dieser reinen Strategien $\pi_{i\alpha}$ sind „wenig profitabel“ so, dass $a_{i\alpha}(\mathfrak{s}) \leq a_i(\mathfrak{s})$. Dies führt zu $\varphi_{i\alpha}(\mathfrak{s}) = 0$.

Wird nun dieses n -Tupel \mathfrak{s} unter T fixiert, so darf der Anteil von $\pi_{i\alpha}$ in s_i bei einer Anwendung von T nicht abnehmen. Also muss $\varphi_{i\beta}(\mathfrak{s}) = 0$ für alle β , damit der Nenner der Definition von s'_i nicht 1 überschreitet.

Ist also \mathfrak{s} unter T fixiert, so gilt für beliebige i und β , dass $\varphi_{i\beta}(\mathfrak{s}) = 0$. Dies ist aber gleichbedeutend damit zu sagen, dass kein Spieler seine Auszahlung verbessern kann, wenn er zu seiner puren Strategie $\pi_{i\alpha}$ wechselt. Aber dies war genau ein Kriterium für ein Gleichgewicht in (2).

Ist umgekehrt \mathfrak{s} ein Gleichgewicht, so ist es klar, dass \mathfrak{s} auch ein Fixpunkt unter T ist.

Da der Raum der n -Tupel den Bedingungen des Fixpunktsatzes von Brouwer entspricht, hat T mindestens einen Gleichgewichtspunkt.

■

Nun wenden wir uns dem ersten Beweis zu, der auf dem Fixpunktsatz von Kakutani beruht und in den *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* veröffentlicht wurde.

3.2 Existenzbeweis unter Verwendung des Fixpunktsatzes von Kakutani

Satz 11 (Fixpunktsatz von Kakutani) Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, konvex und nicht-leer. Weiter sei $f : K \rightarrow K$ eine Korrespondenz⁶ und oberhalb halb-stetig für die gilt:

- Für alle $x \in K$ sei die Menge $f(x)$ nicht-leer und konvex.
- Der Graph von f sei abgeschlossen (d.h. für alle Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ so, dass $y_n \in f(x_n)$ für alle n , $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow y$ haben wir $y \in f(x)$).

Dann existiert ein $x^* \in K$ mit $x^* \in f(x^*)$, also ein Fixpunkt.

Beweis. vgl. BORDER (1985) ■

Existenzbeweis (Nash-Gleichgewicht). Im Beweis verwenden wir die „Funktion der besten Antworten“ aus Definition (5) und die Definition (6) des Nash-Gleichgewichts. Weiter definieren wir

$$B : \times_{i \in n} \Pi_i \rightarrow \times_{i \in n} \Pi_i$$

⁶Eine Korrespondenz ist eine Funktion, die die Punkte aus K auf die Teilmengen von K abbildet.

$$B(\mathbf{s}) := \times_{i \in n} B_i(s_{-i})$$

wobei $B_i(s_{-i})$ die „Funktion der besten Antworten“ aus Definition (5) darstellt und $\times_{i \in n} \Pi_i$ als Produktraum der Strategiemengen zu verstehen ist. Für alle $i \in n$ ist die Menge $B_i(s_{-i})$ nicht-leer, da a_i stetig ist und Π_i kompakt ist. Weiters ist $B_i(s_{-i})$ auch konvex, da a_i quasikonkav auf Π_i ist. B selbst hat einen geschlossenen Graphen, da alle a_i stetig sind. Nach dem Kakutani Theorem existiert ein Fixpunkt, also ein Gleichgewicht. ■

Beispiel 12 *Selbst wenn die Auszahlungen aller Spieler bekannt sind, wissen sie nicht, welche Strategien ihre Mitspieler wählen. Sie müssen darüber bestimmte Wahrscheinlichkeitseinschätzungen bilden. Wenn diese auf gemeinsamen Ausgangswahrscheinlichkeiten basieren und die Spieler unabhängig voneinander entscheiden, kann, wie AUMANN (1987) zeigt, die strategische Unsicherheit durch das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien modelliert werden. Ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien muss nicht notwendigerweise existieren, wie das Lieblingsbeispiel „Matching Pennies“ von Robert J. Aumann zeigt. Zwei Spieler sagen gleichzeitig Kopf π_{i1} oder Zahl π_{i2} . Stimmen die Angaben überein, gewinnt Spieler 1 - anderenfalls Spieler 2. Die Auszahlungen sind in der folgenden Matrix gegeben:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \pi_{21} & \pi_{22} \end{array} \\ \begin{array}{c} \pi_{11} \\ \pi_{12} \end{array} & \begin{pmatrix} (1, 0) & (0, 1) \\ (0, 1) & (1, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Jedem Spieler sind seine eigenen Aktionen bekannt und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kontrahent Kopf oder Zahl sagt beträgt jeweils 0.5. Die einzig sinnvolle Lösung ist das randomisierte Nash-Gleichgewicht mit $(s_1^, s_2^*) = (0.5, 0.5)$.*

4 Nash-Equilibrium in streng kompetitiven Spielen

Der Beweis der Existenz eines Gleichgewichts ist von hoher Bedeutung. Leider ist der Beweis jedoch nicht konstruktiv und hilft daher nicht dabei, Lösungen für konkrete Probleme zu finden. Auch sagt das Nash-Konzept nur in einer kleinen Klasse von Spielen etwas über den qualitativen Charakter der Lösung aus. Eine solche Klasse sind Spiele, in denen zwei Spieler über Auszahlungsfunktionen verfügen, die diametral zueinander sind. Aus Vereinfachungsgründen nehmen wir in diesem Abschnitt an, dass die Namen der Spieler „1“ und „2“ sind. Wir haben also $n = \{1, 2\}$.

Definition 13 (streng kompetitives Spiel) *Ein strategisches Spiel*

$$G = \langle \{1, 2\}, \{\Pi_1, \Pi_2\}, \{a_1, a_2\} \rangle$$

ist streng kompetitiv, falls für jede Strategiekombination $\mathfrak{s} \in \times_{i \in n} \Pi_i$ und $\mathfrak{t} \in \times_{i \in n} \Pi_i$ gilt, dass

$$a_1(\mathfrak{s}) \geq a_1(\mathfrak{t})$$

genau dann, wenn

$$a_2(\mathfrak{t}) \geq a_2(\mathfrak{s}).$$

Streng kompetitive Spiele werden auch als Null-Summen-Spiele bezeichnet, da die Auszahlungen im Regelfall so modelliert werden, dass $a_1 + a_2 = 0$. Wir sagen, dass Spieler i eine Maxminimierungsstrategie verfolgt, wenn er die beste Strategie für sich wählt, unter der Annahme, dass Spieler j jene Strategie wählt, die Spieler i einen maximalen Schaden zugefügt. Wir möchten zeigen, dass ein Null-Summen-Spiel ein Nash-Equilibrium besitzt. Dabei wird sich herausstellen, dass ein Paar von Strategien in diesen Spielen ein Nash-Gleichgewicht ist, wenn sich jeder der Spieler als Maxminimierer verhält. Dieses Resultat ist herausragend, da es eine Verbindung zwischen individueller Entscheidungswahl und der Logik hinter dem Nash-Gleichgewicht bildet.

Definition 14 *Sei $G = \langle \{1, 2\}, \{\Pi_1, \Pi_2\}, \{a_1, a_2\} \rangle$ ein streng kompetitives Spiel. Die Strategie $s_1^* \in \Pi_1$ ist eine Maxminimierungsstrategie für Spieler 1, wenn*

$$\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1^*, s_2)) \geq \min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2)) \text{ für alle } s_1 \in \Pi_1.$$

Analog, spricht man von einer Maxminimierungsstrategie $s_2^* \in \Pi_2$ für Spieler 2, wenn

$$\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2^*)) \geq \min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2)) \text{ für alle } s_2 \in \Pi_2.$$

In Worten: Eine Maxminimierungsstrategie für Spieler i ist eine Strategie, in der Spieler i versucht seine *garantierte* Auszahlung zu maximieren. Eine Maxminimierungsstrategie für Spieler 1 löst das Problem $\max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2)))$ und eine Maximierungsstrategie für Spieler 2 löst das Problem $\max_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2)))$.

Nach der Theorie der monotonen Transformation von Nutzenfunktionen beziehungsweise Auszahlungsfunktionen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a_2 = -a_1$ (vgl. VON NEUMANN UND MORGENSTERN, 1947). Das nächste Resultat zeigt, dass die Maxminimierung der Auszahlung von Spieler 2 äquivalent zur Minmaximierung der Auszahlung von Spieler 1 ist.

Lemma 15 Sei $G = \langle \{1, 2\}, \{\Pi_1, \Pi_2\}, \{a_1, a_2\} \rangle$ ein streng kompetitives Spiel. Dann gilt:

$$\max_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2))) = - \min_{s_2 \in \Pi_2} (\max_{s_1 \in \Pi_1} (a_1(s_1, s_2))).$$

Weiters löst die Strategie $s_2 \in \Pi_2$ das Problem $\max_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2)))$ genau dann, wenn sie auch das Problem $\min_{s_2 \in \Pi_2} (\max_{s_1 \in \Pi_1} (a_1(s_1, s_2)))$ löst.

Beweis. vgl. OSBORNE UND RUBINSTEIN (1994) ■

Der nachfolgende Satz stellt eine Verbindung zwischen dem Nash-Gleichgewicht in einem streng kompetitiven Spiel und den Maxminimierungsstrategien her.

Satz 16 Sei $G = (\{1, 2\}, \{\Pi_1, \Pi_2\}, \{a_1, a_2\})$ ein streng kompetitives Spiel.

1. Wenn (s_1^*, s_2^*) ein Nash-Equilibrium von G ist, dann ist s_1^* eine Maxminimierungsstrategie für Spieler 1 und s_2^* eine Maxminimierungsstrategie von Spieler 2.
2. Wenn (s_1^*, s_2^*) ein Nash-Equilibrium von G ist, dann

$$\max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi} (a_1(s_1, s_2))) = \min_{s_2 \in \Pi} (\max_{s_1 \in \Pi_1} (a_1(s_1, s_2))) = a_1(s_1^*, s_2^*).$$

Alle Nash-Gleichgewichte von G führen somit zu den gleichen Auszahlungen.

3. Wenn

$$\max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2))) = \min_{s_2 \in \Pi} (\max_{s_1 \in \Pi_1} (a_1(s_1, s_2))),$$

s_1^* eine Maxminimierungsstrategie für von Spieler 1 und s_2^* eine Maxminimierungsstrategie von Spieler 2, dann ist (s_1^*, s_2^*) auch ein Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Wir beweisen zuerst die Punkte (1) und (2). Sei (s_1^*, s_2^*) ein Nash-Equilibrium von G . Dann ist $a_2(s_1^*, s_2^*) \geq a_2(s_1^*, s_2)$ für alle $s_2 \in \Pi_2$. Damit erhalten wir wegen $a_2 = -a_1$ auch $a_1(s_1^*, s_2^*) \leq a_1(s_1^*, s_2)$ für alle $s_2 \in \Pi_2$. Also $a_1(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1^*, s_2)) \leq \max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2)))$.

Ähnlich gilt, $a_1(s_1^*, s_2^*) \geq a_1(s_1, s_2^*)$ und damit $a_1(s_1^*, s_2^*) \geq \min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2))$ für alle $s_1 \in \Pi_1$. Also $a_1(s_1^*, s_2^*) \geq \max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2)))$ und insgesamt

$$a_1(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2)))$$

womit s_1^* eine Maxminimierungsstrategie für Spieler 1 ist.

Ein analoges Argument für Spieler 2 ergibt, dass s_2^* eine Maxminimierungsstrategie für Spieler 2 ist und

$$a_2(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2)))$$

womit nun auch $a_1(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_1(s_1, s_2)))$.

Für den Beweis von Punkt (3) sei

$$v^* = \max_{s_1 \in \Pi_1} (\min_{s_2 \in \Pi_2} (a_1(s_1, s_2))) = \min_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_1(s_1, s_2)))$$

Nach dem vorherigen Lemma haben wir $\max_{s_2 \in \Pi_2} (\min_{s_1 \in \Pi_1} (a_2(s_1, s_2))) = -v^*$. Da s_1^* eine Maxminimierungsstrategie von Spieler 1 ist, ergibt sich $a_1(s_1^*, s_2) \geq v^*$ für alle $s_2 \in \Pi_2$. Weil auch s_2^* eine Maxminimierungsstrategie von Spieler 2 ist, ergibt sich $a_2(s_1, s_2^*) \geq -v^*$ für alle $s_1 \in \Pi_1$.

Setzen wir $s_2 = s_2^*$ und $s_1 = s_1^*$ in den zwei Ungleichungen, dann erhalten wir $a_1(s_1^*, s_2^*) = v^*$. Da $a_2 = -a_1$ war, ergibt sich, dass (s_1^*, s_2^*) ein Nash-Equilibrium von G ist. ■

5 Einblick in kooperative Spiele

Unter Rückgriff auf NASH (1950B), VON NEUMANN UND MORGENSTERN (1947) und insbesondere NASH (1953) möchten wir noch kurz auf die Modellierung von kooperativen Spielen eingehen. Dabei kann der Verhandlungsprozess zwischen den Spielern in zwei Schritten modelltechnisch eingeführt werden. Es kann aber auch auf eine axiomatische Methode zurückgegriffen werden, das heisst man gibt sich Eigenschaften vor, die eine „sinnvolle“ Lösung haben sollte. In NASH (1953) wird formal ein 2-Personen-Spiel betrachtet und in vier Schritten die Möglichkeit zu kooperativem Verhalten miteingebaut:

1. Jeder Spieler i wählt eine gemischte Strategie t_i , die er benutzt, wenn die zwei Spieler sich nicht auf eine Kooperation einigen können. Die Strategie t_i ist die Drohung (*engl.* threat) von Spieler i .
2. Die zwei Spieler informieren sich gegenseitig über die Drohungen.
3. Die Spieler handeln unabhängig und ohne zu kommunizieren.
4. Die Auszahlungen werden bestimmt.

Damit handelt es sich bei einem kooperativen Spiel im Wesentlichen um ein 2-Züge-Spiel, bei dem Zug (1) und Zug (3) nicht kooperativ durchgeführt werden.

6 Schlusswort und Ausblick

Die in dieser kurzen Arbeit dargestellten Konzepte nahmen vor allem Bezug auf die Lösung von nicht-kooperativen Spielen. Das *Nash-Gleichgewicht* bildet hierbei das Fundament, auf dem auch zahlreiche Anwendungen aufgebaut werden können. Dabei ist das Nash-Gleichgewicht eine Strategiekombination, bei der jeder Spieler eine optimale Strategie wählt - gegeben die optimalen Strategien aller anderen Spieler. Die Erweiterung von nicht-kooperativen Spielen auf kooperative kann durch die Modellierung eines Verhandlungsspiel erreicht werden, das dem eigentlichen Spiel vorgelagert ist.

Spieltheoretische Methoden werden heute in allen Bereichen der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften intensiv verwendet. Zu den Hauptanwendungsgebieten in der Ökonomie zählen:

- Marktgleichgewichtsberechnung bei vollkommener Konkurrenz und beim Monopol
- Gleichgewichtsberechnung bei rationalen Erwartungen
- Cournot-Nash-Gleichgewichtsberechnung in der Oligopoltheorie
- Marktgleichgewichte bei externen Effekten und asymmetrischer Information
- Gleichgewichte bei Auktionsmechanismen

Die Spieltheorie stellt also das formale Instrumentarium zur Analyse von Konflikten und Kooperation bereit. Die Bedeutung der Spieltheorie zeigt sich nicht nur durch die Nobelpreise von John C. Harsanyi, John F. Nash und Reinhard Selten im Jahr 1994 sondern sogar durch einen erneuten Nobelpreis für Robert J. Aumann und Thomas C. Schelling im Jahr 2005. Es wird heute geschätzt, dass der Hauptteil der noch auftretenden Probleme in der Modellierung und der Anwendung der Theorie auf konkrete Situationen erst in etwa 30 Jahren gelöst sein wird und dann, dank der Spieltheorie, konkrete Politikempfehlungen gegeben werden können. Es gibt also noch viel zu entdecken und zu erforschen.

Literatur

- [1] AUMANN R. J. (1987): „Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality“, *Econometrica*, Vol. 55, No. 1, pp. 1-18.
- [2] BORDER K. C. (1985): Fixed point theorems with applications to economics and game theory, Cambridge University Press, Cambridge (United Kingdom).

- [3] HOLLER M. J., ILLING G. (2003): Einführung in die Spieltheorie, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [4] NASH J. F. (1950A): „Equilibrium Points in n-Person Games“, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 36, No. 1, pp. 48-49.
- [5] NASH J. F. (1950B): „The Bargaining Problem“, *Econometrica*, Vol. 18, No. 2, pp. 155-162.
- [6] NASH J. F. (1951): „Non-Cooperative Games“, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 54, No. 2, pp. 286-295.
- [7] NASH J. F. (1953): „Two-Person Cooperative Games“, *Econometrica*, Vol. 21, No. 1, pp. 128-140.
- [8] VON NEUMANN J., MORGENSTERN O. (1947): Theory of games and economic behavior, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton.
- [9] OSBORNE M. J., RUBINSTEIN A. (1994): A Course in Game Theory, The MIT Press, Cambridge (Massachusetts).
- [10] RITZBERGER K. (2003): Foundations of Non-Cooperative Game Theory, Oxford University Press, Oxford.